3°/ f_n est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

• pour $n=0$, $f_0'(x)=\dfrac{-1}{x(\ln x)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
$f_0'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_0(x)$	‖ 2	↘	‖ $+\infty$	↘	2
	‖	$-\infty$	‖		

• pour $n\neq 0$, $f_n'(x)=-n-\dfrac{1}{x(\ln x)^2}<0$

x	0		1		$+\infty$
$f_n'(x)$	‖	$-$	‖	$-$	
$f_n(x)$	‖ 2	↘	‖ $+\infty$	↘	$-\infty$
	‖	$-\infty$	‖		

4°/ On a : $\lim\limits_{x\to 1^+} f_n(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} f_n(x)=-\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_{f_n}.

• $\lim\limits_{x\to+\infty} f_0(x)=2 \Rightarrow$ la droite $y=2$ est une asymptote horizontale à C_{f_0} au voisinage de $+\infty$.

• pour $n\neq 0$, on a : $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)-(2-nx)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\ln x}=0$

d'où la droite D_n d'équation $y=2-nx$ est une asymptote à C_{f_n} au voisinage de $+\infty$.

5°/ • Etudions les positions relatives de C_0 et C_1 :

$f_1(x)-f_0(x)=-x<0$

pour tout $x\in]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, C_1 est au dessous de C_0 et $C_1\cap C_0=\{A(0,2)\}$.

• Etudions la position de C_1 et D_1 : $y=-x+2$:

$f_1(x)-(-x+2)=\dfrac{1}{\ln x}$ or sur $]0,1[$, $\ln x<0$ et sur $]1,+\infty[$, $\text{Log}\, x>0$